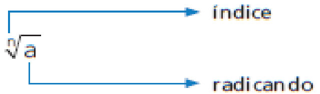
9° ano. Dia 11/5 aula de matemática, Fernando Heberle

Propriedades do radical

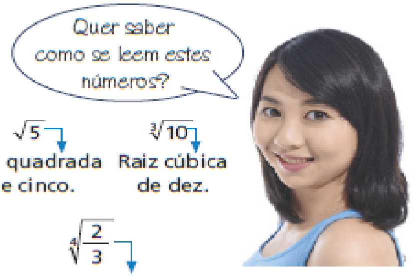
Toda expressão matemática que tenha forma $\sqrt[n]{a}$, com $a \in R_+$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, recebe o nome de **radical aritmético**.

Em todo radical, podemos destacar:



Assim:

- No radical $\sqrt{5}$, o índice é 2, e o radicando é 5.
- No radical $\sqrt[3]{10}$, o índice é 3, e o radicando é 10.



$\sqrt{5}$ Raiz quadrada de cinco.

$\sqrt[3]{10}$ Raiz cúbica de dez.

$\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ Raiz quarta de dois terços.

Propriedades

Os radicais aritméticos apresentam propriedades importantes não só para o estudo dos radicais como também para estudos futuros de outros temas de Matemática. Conheça, a seguir, estas propriedades.

1ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Considere as expressões abaixo.

- $\sqrt[5]{32} = 2$ e $32 = 2^5$

  Então:

  $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

- $\sqrt[4]{81} = 3$ e $81 = 3^4$

  Então:

  $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

Dessa forma, temos:

- $\sqrt{7^2} = 7$
- $\sqrt[3]{10^3} = 10$
- $\sqrt[5]{(x+3)^5} = x + 3$, com $x + 3 \geqslant 0$.

2ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}} \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ n, m, p \in \mathbb{N},\ n > 1,\ p \neq 0 \text{ e } p \text{ divisor comum de } m \text{ e } n.$$

Considere as expressões $\sqrt[8]{10^8}$ e $\sqrt{10^2}$

Usando a primeira propriedade, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[8]{10^8} = 10 \\ \sqrt{10^2} = 10 \end{array}\right] \text{Comparando, temos } \sqrt[8]{10^8} = \sqrt{10^2}.$$

Veja o que fizemos: $\sqrt[8]{10^8} = \sqrt[8:4]{10^{8:4}} = \sqrt{10^2}$

Essa propriedade nos auxilia na simplificação de um radical do tipo $\sqrt[n]{a^m}$, quando existe um divisor comum (diferente de 1) dos números *n* e *m*.

Veja alguns exemplos de simplificação.

- $\sqrt[6]{10^4} = \sqrt[6:2]{10^{4:2}} = \sqrt[3]{10^2}$
- $\sqrt[20]{2^5} = \sqrt[20:5]{2^{5:5}} = \sqrt[4]{2}$
- $\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12:6]{2^{6:6}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$
- $\sqrt[25]{(xy)^{10}} = \sqrt[25:5]{(xy)^{10:5}} = \sqrt[5]{(xy)^2}$

3ª propriedade:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ m,\ n, \in \mathbb{N},\ m > 1 \text{ e } n > 1.$$

Observe as expressões $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ e $\sqrt[6]{64}$

Calculando:

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[6]{64} = 2$

Comparando, temos $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$.

Veja o que fizemos: $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64}$.

Assim:

- $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5 \cdot 3]{2} = \sqrt[15]{2}$
- $\sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[2 \cdot 2]{10} = \sqrt[4]{10}$

4ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 1.$$

Considerando as expressões $\sqrt{4 \cdot 25}$ e $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$.

Calculando, temos:

$\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{100} = 10$

$\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$

Comparando, temos $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$

Então:

- $\sqrt{3 \cdot 11} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{11}$
- $\sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$
- $\sqrt[7]{4xy} = \sqrt[7]{4} \cdot \sqrt[7]{x} \cdot \sqrt[7]{y}$ com $x, y \in \mathbb{R}_+$.

5ª propriedade:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}_+,\ b \in \mathbb{R}_+^*,\ n \in \mathbb{N}, \text{ e } n > 1.$$

Considerando as expressões $\sqrt{\frac{25}{9}}$ e $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$.

$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

$\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$

Comparando, temos:

$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$

Portanto:

$\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

- $\sqrt[5]{\frac{a}{5}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{5}}$ com $a \in \mathbb{R}_+$

ATIVIDADES

Responda às questões no caderno.

1. Dê o valor de cada uma das expressões.

a) $\sqrt[5]{3^5}$ **c)** $\sqrt[7]{(2 \cdot 5)^7}$

b) $\sqrt[3]{7^3}$ **d)** $\sqrt{(5a^2)^2}$

2. Decomponha o radicando em fatores primos e, em seguida, use uma das propriedades dos radicais aritméticos para encontrar o valor das expressões.

a) $\sqrt{49}$ **c)** $\sqrt[4]{625}$ **e)** $\sqrt[4]{81}$

b) $\sqrt[6]{729}$ **d)** $\sqrt[10]{1024}$ **f)** $\sqrt[3]{343}$

3. Determine o valor do número *x* em cada uma das igualdades.

a) $\sqrt[14]{2^8} = \sqrt[x]{2^4}$ **c)** $\sqrt[8]{5^4} = \sqrt{5^x}$

b) $\sqrt[15]{10^5} = \sqrt[3]{10^x}$ **d)** $\sqrt[10]{6^x} = \sqrt[5]{6}$

4. Dividindo o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número, diferente de zero, simplifique os radicais.

a) $\sqrt[15]{2^5}$ **c)** $\sqrt[16]{10'}$

b) $\sqrt[14]{3^7}$ **d)** $\sqrt[10]{5^8}$

5. Decomponha o radicando em fatores primos e, em seguida, simplifique cada um dos radicais.

a) $\sqrt[10]{32}$ **d)** $\sqrt[6]{16}$

b) $\sqrt[9]{27}$ **e)** $\sqrt[8]{64}$

c) $\sqrt[16]{81}$ **f)** $\sqrt[15]{1024}$

6. Determine o número real *x* das igualdades.

a) $\sqrt[x]{\sqrt[6]{10}} = \sqrt[24]{10}$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[x]{3}} = \sqrt[15]{3}$

7. Escreva como um produto de radicais.

a) $\sqrt{5 \cdot 7}$ **d)** $\sqrt[6]{x \cdot y}$

b) $\sqrt[3]{ax}$ **e)** $\sqrt{2ab}$

c) $\sqrt[7]{3^2 \cdot 11}$ **f)** $\sqrt[3]{x^{2y}}$

8. Decomponha o radicando em fatores primos e escreva cada expressão na forma de um produto de radicais.

a) $\sqrt{10}$ **c)** $\sqrt[3]{35}$ **e)** $\sqrt[10]{15}$

b) $\sqrt[6]{21}$ **d)** $\sqrt[7]{30}$ **f)** $\sqrt[3]{154}$

-